ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ MINH TÂM

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP HAI VỚI CÁC HÀM LỚP C^1

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ MINH TÂM

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP HAI VỚI CÁC HÀM LỚP C^1

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Lời nói đầu

1. Lý do chọn đề tài

Điều kiện tối ưu Karush – Kuhn – Tucker (KKT) là công cụ hữu hiệu để giải các bài toán tối ưu phi tuyến. Các điều kiện cần cấp 1 cho phép ta tìm được tập các điểm dừng. Các điều kiện tối ưu cấp 2 cho phép loại bỏ các điểm dừng không là nghiệm và xác định liệu một điểm dừng có là nghiệm hay không. I. Ginchev và V. I. Ivanov ([6], 2008) đã thiết lập các điều kiện cần tối ưu KKT và Fritz John (FJ) cấp 2 cho bài toán tối ưu có ràng buộc bất đẳng thức và ràng buộc tập với các hàm lớp $\mathbb{C}^1$, nhưng đạo hàm của chúng không Lipschitz địa phương. Các điều kiện đủ nhận được với hàm mục tiêu khả vi và giả lồi cấp 2. V. I. Ivanov ([10], 2009) tiếp tục nghiên cứu các điều kiện tối ưu cho cực tiểu cô lập của bài toán đó; các điều kiện đủ được dẫn với các giả thiết về tính lồi suy rộng. Điều kiện tối ưu cấp 2 là đề tài thời sự, được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy, tôi chọn đề tài "Điều kiện tối ưu cấp hai với các hàm lớp $\mathbb{C}^1$".

2. Nội dung đề tài

Luận văn trình bày các điều kiện tối ưu Karush – Kuhn – Tucker và Fritz John cấp 2 của Ginchev – Ivanov ([6], 2008) cho bài toán tối ưu với hữu hạn ràng buộc bất đẳng thức và ràng buộc tập với các hàm khả vi liên tục, và điều kiện tối ưu cấp 2 cho cực tiểu cô lập của Ivanov ([10], 2009) cho bài toán đó.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG I. ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP 2 CỦA GINCHEV - IVANOV

Trình bày các kết quả nghiên cứu của Ginchev - Ivanov ([6], 2008) về các điều kiện tối ưu Fritz John và KKT cấp 2 cho bài toán tối ưu có ràng buộc bất đẳng thức và ràng buộc tập. Trong điều kiện cần, hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc tích cực được giả thiết là khả vi liên tục, nhưng gradient của chúng không nhất thiết Lipschitz địa phương. Các điều kiện cần dạng hệ không tương thích và dạng đối ngẫu được trình bày. Trong điều kiện đủ, hàm mục tiêu khả vi và giả lồi cấp 2, các hàm ràng buộc khả vi và tựa lồi. Trong các điều kiện đủ cho cực tiểu địa phương cô lập ta giả thiết bài toán thuộc lớp $\mathbb{C}^{1,1}$; các điều kiện đủ cho cực tiểu parabolic cô lập cấp 2 của bài toán lớp $\mathbb{C}^1$.

CHƯƠNG II. ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP 2 CHO CỰC TIỂU CÔ LẬP CẤP 2

Trình bày các kết quả nghiên cứu của Ivanov ([10], 2009) về các điều kiện tối ưu cấp 1 và cấp 2 cho cực tiểu cô lập cấp 2 của bài toán có ràng buộc bất đẳng thức và ràng buộc tập. Trong các điều kiện cần cho cực tiểu địa phương cô lập cấp 2, các hàm khả vi liên tục và khả vi theo phương cấp 2. Các điều kiện cần tối ưu cấp 2 dạng hệ không tương thích và dạng đối ngẫu, có và không có điều kiện chính quy cấp 2 được trình bày. Các điều kiện đủ tối ưu cho cực tiểu cô lập được trình bày với các giả thiết về tính lồi suy rộng.

Luận văn này được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Đỗ Văn Lưu, Viện toán học - Viện Hàn Lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn khoa học của mình, thầy đã tận tâm và nhiệt tình chỉ bảo.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Ban chủ nhiệm khoa Toán - Tin, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cùng toàn thể cán bộ giảng dạy lớp cao học toán K8B đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập.

Cuối cùng tác giả xin cảm ơn bố mẹ, gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã luôn bên cạnh động viên, giúp đỡ trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Tác giả

Trần Thị Minh Tâm

Chương 1

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP 2 CỦA GINCHEV - IVANOV

Chương 1 trình bày các điều kiện tối ưu Fritz John và Karush – Kuhn – Tucker cấp 2 của Ginchev - Ivanov [6] cho bài toán tối ưu có hữu hạn ràng buộc bất đẳng thức và ràng buộc tập. Trong điều kiện cần, hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc tích cực được giả thiết thuộc lớp $\mathbb{C}^1$, nhưng gradient của chúng không nhất thiết Lipschitz địa phương. Các điều kiện cần dạng hệ bất đẳng thức không tương thích và dạng đối ngẫu được trình bày. Trong điều kiện đủ, hàm mục tiêu được giả thiết khả vi và giả lồi cấp 2, các hàm ràng buộc khả vi và tựa lồi. Các điều kiện đủ cho cực tiểu parabolic cô lập cấp 2 của bài toán lớp $\mathbb{C}^1$ cũng được trình bày trong chương này.

1.1 Điều kiện đủ tối ưu cho cực tiểu toàn cục

Trong chương này chúng ta trình bày điều kiện tối ưu KKT và FJ cho bài toán (P) sau:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad f_0(x), \\ &f_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., m, \\ &x \in X, \end{aligned}$$

trong đó $X \subset \mathbb{R}^n$ và $f_i, i = 0, 1, ..., m$ là các hàm xác định trên X. Ký hiệu $\mathbb{R}$ là tập các số thực và $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ trong đó X là tập mở, $X \subset \mathbb{R}^n$, f khả vi tại điểm $x \in X$, $\bigtriangledown f(x)$ là đạo hàm của f tại x. Đạo hàm theo phương cấp 2 $f''(x,u)$ của f tại $x \in X$ theo phương $u \in \mathbb{R}^n$ được xác định bởi công thức

$$f''(x,u) = \lim_{t \to +0} \frac{2}{t^2} \left(f(x+tu) - f(x) - t \bigtriangledown f(x) u \right).$$

Hàm f được gọi là khả vi theo phương cấp 2 trên X nếu đạo hàm $f''(x,u)$ tồn tại với mỗi $x \in X$ và phương bất kỳ $u \in \mathbb{R}^n$.

Nhắc lại hàm $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là tựa lồi tại $x \in X$ (theo X) nếu

$$\begin{aligned} & y \in X, f(y) \leqslant f(x), t \in [0,1], (1-t)x + ty \in X \\ \Rightarrow & f((1-t)x+ty) \leqslant f(x). \end{aligned}$$

Nếu tập X là lồi thì hàm f được gọi là tựa lồi trên X nếu với mọi $x, y \in X$ và $t \in [0,1]$ thì ta có

$$f((1-t)x+ty) \leqslant \max(f(x), f(y)).$$

Bổ đề 1.1.1. ([12]) *Giả sử X là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và f là hàm thực xác định trên X khả vi và tựa lồi tại $x \in X$. Khi đó,*

$$y \in X, f(y) \leqslant f(x) \Longrightarrow \bigtriangledown f(x)(y-x) \leqslant 0.$$

Giả sử hàm $f : X \to \mathbb{R}$ với $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở, f khả vi tại $x \in X$. Khi đó, f được gọi là giả lồi tại $x \in X$ nếu

$$y \in X \text{ và } f(y) < f(x) \Longrightarrow \bigtriangledown f(x)(y-x) < 0.$$

Nếu f khả vi trên X thì f được gọi là giả lồi trên X nếu f là giả lồi tại mỗi $x \in X$.

Xét hàm $f : X \to \mathbb{R}$, trong đó X là miền mở, f khả vi tại $x \in X$ và khả vi theo phương cấp 2 tại $x \in X$ theo mỗi phương $y - x$ sao cho $y \in X$, $f(y) < f(x), \bigtriangledown f(x)(y-x) = 0$.

Định nghĩa 1.1.2. *Ta nói f là giả lồi cấp 2 (nói vắn tắt là 2-giả lồi) tại*

$x \in X$ nếu với mỗi $y \in X$,

$$f(y) < f(x) \Rightarrow \triangledown f(x)(y-x) \leqslant 0;$$
$$f(y) < f(x), \ \triangledown f(x)(y-x) = 0 \Rightarrow f''(x, y-x) < 0.$$

Giả sử f khả vi trên X và khả vi theo phương cấp 2 tại mỗi $x \in X$ theo mỗi phương $y - x$ sao cho

$$y \in X, f(y) < f(x), \triangledown f(x)(y-x) = 0.$$

Ta nói f là 2-giả lồi trên X nếu f là 2-giả lồi tại mỗi $x \in X$. Từ định nghĩa này ta suy ra mọi hàm giả lồi khả vi là 2-giả lồi. Điều ngược lại không đúng.

Trong phần này ta giả sử $f_i, i = 0, ..., m$ là các hàm thực xác định trên không gian Euclid hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$. Xét bài toán (P). Ký hiệu S là tập chấp nhận được

$$S := \{x \in X | f_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, ..., m\}.$$

Với mỗi điểm chấp nhận được $x \in S$ ta kí hiệu $I(x)$ là tập các chỉ số ràng buộc tích cực

$$I(x) := \{i \in \{1, 2, ..., m\} | f_i(x) = 0\}.$$

Định nghĩa 1.1.3. *Phương d được gọi là tới hạn tại điểm $x \in S$ nếu $\triangledown f_i(x) d \leqslant 0$ với mọi $i \in \{0\} \cup I(x)$.*

Kết quả chính của phần này là định lý sau đây:

Định lý 1.1.4. *Giả sử ràng buộc tập X là mở, các hàm $f_i, i = 0, ..., m$ xác định trên X. Giả sử $f_i, (i \in \{0\} \cup I(\bar{x}))$ khả vi tại điểm chấp nhận được $\bar{x}$ và khả vi theo phương cấp 2 tại $\bar{x}$ theo mọi phương tới hạn $d \in \mathbb{R}^n$, f_0 là 2-giả lồi tại $\bar{x}$, $f_i, (i \in I(\bar{x}))$ là tựa lồi tại $\bar{x}$. Với mỗi phương tới hạn $d \in \mathbb{R}^n$, tồn tại các nhân tử Lagrange không âm $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ với*

$$\lambda_i f_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m, \quad \triangledown L(\bar{x}) = 0,$$

trong đó $L = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ là hàm Lagrange và $L''(\bar{x}, d) \geqslant 0$. Khi đó, $\bar{x}$ là cực tiểu toàn cục của (P).

Chứng minh

Để đơn giản kí hiệu, ta sẽ viết $\bigtriangledown L(\bar{x}) = \bigtriangledown_x L(\bar{x},\lambda)$.

Giả sử ngược lại tồn tại $x \in S$ với $f_0(x) < f_0(\bar{x})$. Giả sử $x - \bar{x}$ là một phương tới hạn. Do tính 2-giả lồi, ta có $\bigtriangledown f_0(\bar{x})(x-\bar{x}) \leqslant 0$. Do tính tựa lồi và $f_i(x) \leqslant f(\bar{x}), i \in I(\bar{x})$ và do Bổ đề 1.1.1 ta có $\bigtriangledown f_i(\bar{x})(x-\bar{x}) \leqslant 0$ với mọi $i \in I(\bar{x})$. Điều này suy ra $x - \bar{x}$ là tới hạn.

Sử dụng giả thiết của định lý suy ra tồn tại nhân tử không âm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ với

$$\lambda_i f_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \ldots, m \text{ và } \bigtriangledown L(\bar{x})(x-\bar{x}) = 0$$

sao cho

$$L''(x, x-\bar{x}) \geqslant 0.$$

Do đó, $\lambda_i = 0$ với $i \notin I(\bar{x})$. Do $x - \bar{x}$ là tới hạn, ta nhận được

$$\bigtriangledown L(\bar{x})(x-\bar{x}) = \bigtriangledown f_0(\bar{x})(x-\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \bigtriangledown f_i(\bar{x})(x-\bar{x}) \leqslant 0$$

Vì vậy,

$$\bigtriangledown f_0(\bar{x})(x-\bar{x}) = 0 \text{ và } \lambda_i \bigtriangledown f_i(\bar{x})(x-\bar{x}) = 0 \text{ với mọi } i \in I(\bar{x}).$$

Khi đó, $\bigtriangledown f_i(\bar{x})(x-\bar{x}) = 0$ khi $\lambda_i > 0$. Do tính 2-giả lồi, ta suy ra $f_0''(\bar{x}, x-\bar{x}) < 0$. Do đó

$$\begin{aligned} L''(\bar{x}, x-\bar{x}) &< \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i f''(\bar{x}, x-\bar{x}) \\ &= \sum_{i \in I(\bar{x}), \lambda_i > 0} \lambda_i \lim_{t \to +0} \frac{f_i(\bar{x} + t(x-\bar{x})) - f_i(\bar{x})}{t^2/2} \end{aligned}$$

Do tính tựa lồi ta có $f_i(\bar{x} + t(x-\bar{x})) \leqslant f_i(\bar{x}) = 0$, với mọi $i \in I(\bar{x})$ và với mọi $t \in [0,1]$ đủ nhỏ. Từ đấy ta suy ra $L''(x, x-\bar{x}) < 0$. Đây là một mâu thuẫn.

Định lý 1.1.4 là một tổng quát hóa kết quả sau đây của Mangasarian [12, định lý 10.1.2], bởi vì lớp các hàm 2-giả lồi chứa lớp các hàm giả lồi khả vi.

Định lý 1.1.5. (Xem [12]). *Giả sử tập ràng buộc X mở. Các hàm $f_i\,(i=0,1,...,m)$ xác định trên X và $\bar{x}$ là điểm chấp nhận được. Giả sử $f_i(i\in\{0\}\cup I(\bar{x}))$ khả vi tại $\bar{x}$, f_0 giả lồi tại $\bar{x}$ và $f_i\,(i\in I(\bar{x}))$ là tựa lồi tại $\bar{x}$. Nếu tồn tại nhân tử Lagrange không âm $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ với*

$$\lambda_i f_i\,(\bar{x})=0, i=1,...,m \text{ và } \triangledown L\,(\bar{x})=0,$$

trong đó

$$L=f_0\,(x)+\textstyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i\,(x)$$

thì $\bar{x}$ là cực tiểu toàn cục của (P).

Ví dụ 1.1.6. *Xét bài toán sau:*

$$\text{Minimize}\quad f_0\,(x)=\begin{cases} x^2 & , x\geqslant 0\\ -x^2 & , x<0\end{cases},\quad \text{với ràng buộc}\quad f_1=-x\leqslant 0.$$

Trong bài toán này $f_i\in\mathbb{C}^1, i=0,1$. Hàm mục tiêu là 2-giả lồi tại $\bar{x}=0$. Hàm ràng buộc là tuyến tính, cho nên tựa lồi. Hàm Lagrange là $L\,(x)=f_0\,(x)-\lambda x$. Điểm dừng duy nhất là $\bar{x}=0$ với nhân tử Lagrange $\lambda=0$. Ràng buộc là tích cực tại $\bar{x}=0$. Các phương tới hạn là tất cả các phương $d\in\mathbb{R}$ sao cho $d\geqslant 0$. Dễ kiểm tra rằng

$$L''\,(0,d)=f_0''\,(0,d)=2d^2\geqslant 0.$$

Khi đó, theo Định lý 1.1.4, $\bar{x}=0$ là cực tiểu toàn cục. Bài toán này không thể giải được với các điều kiện đủ của Mangasarian [12, định lý 10.1.2], bởi vì f_0 không giả lồi.

Ví dụ 1.1.7. *Xét bài toán sau*

$$\text{Minimize}\quad f_0\,(x)=x^3,\qquad \text{với ràng buộc}\qquad f_1\,(x)=x\leqslant 0.$$

Hàm ràng buộc $f_1=x$ là tựa lồi. Hàm mục tiêu $f_0=x^3$ không là 2-giả lồi tại $\bar{x}=0$, nhưng là tựa lồi. Hàm Lagrange là $L\,(x,\lambda)=x^3+\lambda x$. Tập các phương tới hạn là $\{d\in\mathbb{R}|d\leqslant 0\}$. Điểm dừng duy nhất là $\bar{x}=0$ với nhân tử Lagrange $\lambda=0$. Ta có $L''\,(0,0)=0$, nhưng $\bar{x}=0$ không là cực tiểu toàn cục.